半導体デバイスの物理(基礎編)
波動の性質

1　波動を把握する意味

半導体物理を扱うために、必要な基礎知識の準備... どちらかと言えばウォーミングアップの意味合いが強い... をしたいと思います。その手始めとして扱うのは、古典物理学における「波動」です。

この先で出てくる話ですが、半導体物理を理解するには、どうしても量子力学の基礎事項を知っている必要があります。更にそのベースになる知識として必要になるのが、今回説明する「波動」なのです。

今回のレポートを通して理解頂きたい事は以下の点です。

・波動の表現 : $A\sin(kx-\omega t)$

・波動の干渉 : 経路差が波長 λ(整数倍) で強調される

まずは、高校生に戻ったつもりで見ていくことにしましょう。最初はゆっくりと進め、少しずつ加速していきたいと思います。

2　波動の表現

はじめに「波動の定義」です。**波動とは、ある媒質に生じた歪が、時間に対して周期的に運動する現象**と表現することができます。図 1 に波動の例を示します。まず**振幅** A、波長λ **で停止している波**は式 (1) で表されます。

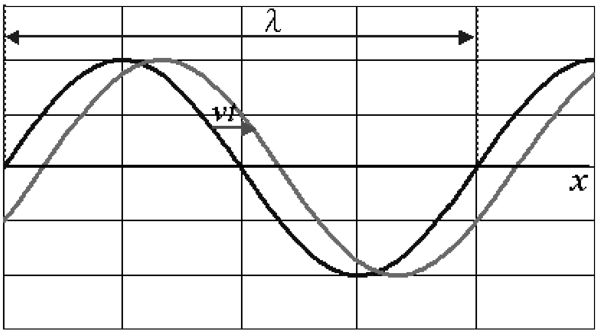

図 1: 速度 v で移動する正弦波

$$\psi(x)=A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{1}$$

$\sin()$ の値そのものは 2π に対する位相として決まります。ある位置 x に対する位相の決め方として「波長 (位置)λ ならば位相 2π、では位置 x の位相は？」と考えれば式 (1) を理解することができるでしょう。

ここで今後の便宜を考えて、**波数**という言葉を導入します。波数とは、**単位長あたりに進む位相の値**です。位相 2π を 1 個の波 (振動) と考えれば、波数は文字通り単位長あたりの波の数を表すと捉えることができます。先程と同じように「波長 (位置)λ ならば位相 2π、では単位長 (1) の位相は？」と考えれば、波数 k は次式となります。

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

この波数 k を使い、改めて静止した波を表したものが式 (3) です。

$$\psi(x) = A\sin(kx) \tag{3}$$

次は x 方向へ速度 v で動く波を考えてみましょう。ここで図 1 を見ると、時間 t に対して波の位置は vt 移動するので、結果としてその分手前の値を見ることになります。位置の移動距離 vt に相当する位相は、今まで同様に

$$\frac{2\pi}{\lambda}vt = kvt \tag{4}$$

として与えられるので、**速度 v で進行する波**は式 (5) で表すことができます。

$$\psi(x) = A\sin\{k(x - vt)\} \tag{5}$$

更に、ここで**角振動数**という言葉を導入します。我々は式 (5) において、波が速度 v 移動していることを「位置が vt 移動→位相が kvt 変位する」のように、位相の変化に置き換えて表現しています。ならば最初から波の移動を「ある位置における単位時間当たりの位相変化」としても全く問題ないので、これを角振動数と呼ぶことにします。

つまり角振動数を ω とすれば、波が動くことにより生じる時間 t での位相変化は ωt と表すことができるという意味であり、このとき**角振動数 ω で x 方向へ進行する波**は、

$$\psi(x) = A\sin(kx - \omega t) \tag{6}$$

になります。そして、このように角振動数 ω を定義すると、式 (4) から以下の関係が導き出せます。

$$\begin{gathered}\omega t = \frac{2\pi}{\lambda}vt \quad \to \quad \omega t = 2\pi\left(\frac{v}{\lambda}\right)t \quad \to \quad \omega = 2\pi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \\ \downarrow \\ \omega = 2\pi\nu \quad (\nu = v/\lambda)\end{gathered} \tag{7}$$

3　波動の干渉

次に**位相が異なる 2 つの進行波が重なり合ったときに何が起きる**かを見ることにしましょう。前提として、波長 λ(波数 k) と進行速度 v(角振動数 ω) は等しいとします。また計算の簡単のため、振幅 A も等しいものとします。位相差を δ としたとき、位相が異なる 2 つの進行波 $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t)$ は、以下のようになります。

$$\psi_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \tag{8}$$

$$\psi_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta) \tag{9}$$

ここで式 (9) を

$$\psi_2(x,t) = A\sin\{(kx - \omega t) + \delta\}$$

と解釈し、加法定理 (セクション 4.1 参照) によって展開すると、式 (10) が得られます。

$$\psi_2(x,t) = A\{\sin(kx - \omega t)\cos\delta + \cos(kx - \omega t)\sin\delta\} \tag{10}$$

式 (8)(10) から、合成波 $\psi_1 + \psi_2$ は式 (11) となります。

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 &= A\sin(kx - \omega t) + A\{\sin(kx - \omega t)\cos\delta + \cos(kx - \omega t)\sin\delta\} \\ &= A(1 + \cos\delta)\sin(kx - \omega t) + A\sin\delta\cos(kx - \omega t) \\ &= X\sin(kx - \omega t) + Y\cos(kx - \omega t)\end{aligned} \tag{11}$$

尚、式 (11) において　$X = A(1+\cos\delta), \quad Y = A\sin\delta$

そして、$\tan\beta = Y/X$ とすれば、合成定理 (セクション 4.2 参照) によって式 (12) が得られます。

$$\begin{aligned}
\psi_1 + \psi_2 &= X\sin(kx-\omega t) + Y\cos(kx-\omega t) \\
&= \sqrt{X^2+Y^2}\,\sin(kx-\omega t+\beta) \\
&= A\sqrt{(1+\cos\delta)^2+\sin^2\delta}\,\ \sin(kx-\omega t+\beta) \\
&= A\sqrt{1+2\cos\delta+\cos^2\delta+\sin^2\delta}\,\ \sin(kx-\omega t+\beta) \\
&= A\sqrt{2(1+\cos\delta)}\,\sin(kx-\omega t+\beta)
\end{aligned} \tag{12}$$

それでは、式 (12) の振幅に注目します。$-1 \leqq \cos\delta \leqq 1$ なので

$$0 \leqq A\sqrt{2(1+\cos\delta)} \leqq 2A \tag{13}$$

になります。これより

$$\text{振幅}:\begin{cases} 0 & : \cos\delta = -1 \quad \rightarrow \quad \delta = (2n+1)\pi, \quad (n=0,1,2,\dots) \\ 2A & : \cos\delta = 1 \quad \rightarrow \quad \delta = 2n\pi, \quad (n=0,1,2,\dots) \end{cases} \tag{14}$$

であることがわかります。**つまり観測点の位相差により振幅が変化する**のです。これが**干渉**です。同じことを位相差ではなく経路の差として考えた場合、位相 2π が波長 λ に相当することから

$$\text{振幅}:\begin{cases} 0 & : \delta = (2n+1)\pi \quad \rightarrow \quad \lambda(n+1/2), \quad (n=0,1,2,\dots) \\ 2A & : \delta = 2n\pi \quad \rightarrow \quad n\lambda, \quad (n=0,1,2,\dots) \end{cases} \tag{15}$$

と表すこともできます。

例えば今回扱っている波動を仮に「音波」であるとすれば、位相差 $(2n+1)\pi$ の場合には全く音が聞こえない (振幅 0) ということになります。

また「光」を用いて「干渉」を可視化したのが有名な「ヤングの実験」ですが、「光」自身が波動の性質を持つことは、この実験で証明されました。図 2 では、スクリーン上の観測点 P において、スリット $S1, S2$ からの光の経路差が波長の $\lambda(n+1/2)$ に相当するとき暗線 (振幅 0)、$n\lambda$ に相当するとき揮線 (振幅 2 倍) が現れます。結果としてにスクリーン上で暗線/揮線の縞模様が観測されます。

重要なのは、**波動の経路差と波長に関係により振幅 (疎密) の差が明確に現れる**ことです。ある意味この現象

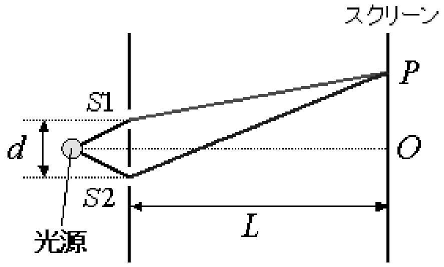

図 2: ヤングの実験

を観測できれば、その観測対象は波動の性質を有すると言えます。

これで波動の特徴について予備知識が付いた状態になりました。この知識をベースにし、次回は幾つかの実験結果から**電子の粒子性と波動性を定性的に理解したい**と思います。

4　付録:数学基礎事項

4.1　加法定理

三角関数の加法定理を証明します。高校時代の数学の復習です。ポイントは $(\alpha+\beta)$ での構成された図形を α,β に分解して解釈することです。例えば図 3(a) のように。

図 3(a) を見ると、$\triangle OAC$ と $\triangle OBD$ が等しいことは自明 (二辺挟角) でしょう。そこで、各点 A,B,C,D の

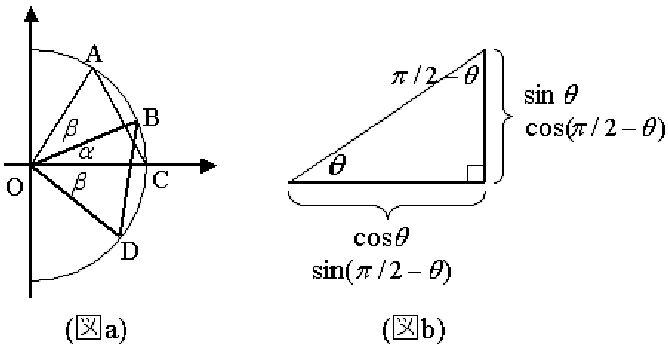

図 3: 加法定理の証明

座標を内角 α,β を用いて表してみます。尚、図 3(a) の円の半径は 1 であるとします。

$$\begin{cases} A & : (\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)) \\ B & : (\cos\alpha,\ \sin\alpha) \\ C & : (1,\ 0) \\ D & : (\cos\beta,\ -\sin\beta) \end{cases} \tag{16}$$

式 (16) より辺 AC と辺 BD の長さを割り出してみると

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta) \\ &= 1+\{\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)\}-2\cos(\alpha+\beta) \\ &= 2\{1-\cos(\alpha+\beta)\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2 \\ &= (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 2(1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \end{aligned} \tag{18}$$

辺 AC と辺 BD の長さは等しいので、式 (17)(18) より

$$\begin{gathered} 2\{1-\cos(\alpha+\beta)\} = 2(1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{gathered} \tag{19}$$

式 (19) として cos の加法定理が導かれます。ここで sin と cos の変換を考えてみると、図 3(b) より

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{20}$$

であることは明らかです。これより

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\} \\
&= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right\} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned} \tag{21}$$

となり、$\sin$ の加法定理も導くことができました。

4.2　合成定理

ここでは、$\sin$ と $\cos$ の合成について考えます。例えば式 (22) があったとき

$$\psi(\alpha) = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \tag{22}$$

$\sin$ も $\cos$ も周期関数なので、$\psi(\alpha)$ が少し位相のずれた周期関数になることは、何となく想像できるでしょう。もし X, Y が三角関数で表せれば、セクション 4.1 で導いた加法定理を使って、$\sin$ 又は $\cos$ にまとめられそうな気がします。

X, Y を三角関数で表現する... 考えてみると極座標で表示するという手があります。図 4 を見ればわかるよう

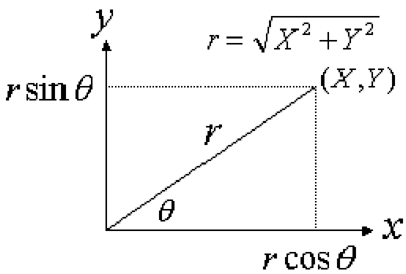

図 4: 極座標変換

に、任意の点 (X, Y) は

$$X = r\cos\theta \tag{23}$$

$$Y = r\sin\theta \tag{24}$$

$$\left(r=\sqrt{X^2+Y^2},\ \tan\theta=\frac{Y}{X}\right)$$

として極座標で表すことができます。従って、これらを式 (22) に代入すると

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha \\
&= r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha \\
&= r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \\
&= \sqrt{X^2+Y^2}\ \sin(\alpha+\theta)
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\text{ただし}\quad \tan\theta=\frac{Y}{X}$$

として合成式を得ることができます。

以上

履歴

2005/06/07 : 初版

2005/06/08 : 誤字修正 & 干渉説明修正