

# 半導体デバイスの物理(基礎編)

## 電子の粒子性と波動性

今回は電子の粒子性と波動性が明らかにされた道筋を簡単に説明します。厳密性はあまり無いので、肩の力を抜いて読んでみて下さい。

### 1 電子の粒子性(1):陰極線

J.J.Thomson は陰極線の性質を調査し、以下の結論を得ています。

- ・ 陰極線は直進する
- ・ 陰極線は負の電荷を持った粒子で構成される
- ・ 陰極線を構成する粒子の電荷 ( $q$ ) と質量 ( $m$ ) の比 ( $q/m$ ) は一定である

重要なのは「電荷と質量の比 ( $q/m$ ) は一定」であるということです。陰極線を構成する粒子は基本単位を持つ可能性が示唆されているからです。それでは、この実験内容を詳しく見ることにしましょう。

図1は Thomson が使用した陰極線の実験装置です。真空管内に置かれた陰極から陰極線が出てきます。真空

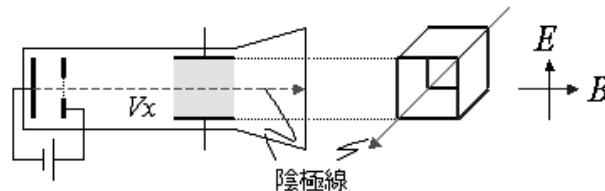


図1: 陰極線の実験

管内の途中で電界と磁界が印加されるようになっていきます。電界も磁界も無いとき、陰極線は直進してスクリーンの中心に当たります。電界又は磁界が印加されたとき陰極線の軌道は曲がり、スクリーンの中心からずれます。次に電界/磁界の印加部からスクリーンまでの陰極線の振る舞いを図2に示します。

初めに電界のみが印加されている場合を考えます。 $x$ 方向の速度  $V_x$  で電荷が飛んできた場合、図2のように

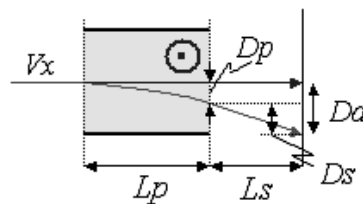


図2: 陰極線の振る舞い

極板間の電界  $E$  により  $y$  方向へ軌道が曲がります。ここで  $y$  方向の変位について考えてみましょう(力学の復習を含めつつ)。

運動量  $p$  は  $p = mv$  と定義されます。 $m$  は運動質点の質量、 $v$  は速度です。このときニュートンの運動第2法則として

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1)$$

が成立します。つまり運動量  $p$  の時間  $t$  に対する変化が力  $F$  です。そして質量  $m$  が時間によらず一定であれば式 (2) が得られます。

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (2)$$

今回の場合、極板間の電界  $E$  によって電荷  $q$  にかかる  $y$  方向の力は、クーロンの法則から  $qE$  であることがわかっています。従って時間  $t$  に対する  $y$  方向の速度  $v_y(t)$  は

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE \quad m \int_0^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t qEdt \quad v_y(t) = \frac{qEt}{m} \quad (3)$$

電荷が極板間に突入してから抜けるまでの時間を  $t_p$  とすれば、 $y$  方向の変位  $D_p$  は

$$D_p = \int_0^{t_p} v_y(t) dt = \int_0^{t_p} \frac{qEt}{m} dt = \frac{qE}{2m} t_p^2 \quad (4)$$

更に極板間を抜けてからスクリーンへ到達するまでの時間を  $t_s$  とすれば、この間の  $y$  方向変位  $D_s$  は、 $v_y(t_p)$  の等速運動が  $t_s$  続くと考えれば良いので

$$D_s = v_y(t_p) t_s = \frac{qEt_p t_s}{m} \quad (5)$$

この結果、中心からの  $y$  方向の総変位量  $D_a$  は式 (6) となります。

$$D_a = D_p + D_s = \frac{qEt_p}{m} \left( \frac{t_p}{2} + t_s \right) \quad (6)$$

ここで電荷の  $x$  方向の速度を  $v_x$  とすれば  $t_p, t_s$  は式 (7) のように表すことができます。

$$t_p = \frac{L_p}{v_x}, \quad t_s = \frac{L_s}{v_x} \quad (7)$$

従って式 (6) における未知 (直接の測定が不能) 変数は  $q, m, v_x$  となります。

次に電界  $E$  を印加したままの状態では磁界  $B$  を印加します。磁界は電界/陰極線の両者に対して垂直に印加します。そして陰極線を構成する電荷に作用する電界と磁界からの力が逆方向で釣り合うように磁界を調整します。等しくなった場合、陰極線は直進してスクリーンの中心にあたるようになります。磁界から働く力の大きさは  $qv_x B$  なので<sup>1</sup>、このとき式 (8) が成立します。

$$qE = qv_x B \quad v_x = \frac{E}{B} \quad (8)$$

式 (6)(7)(8) を整理すると、 $q/m$  として式 (9) が得られます。

$$\frac{q}{m} = \frac{2ED_a}{B^2 L_p (L_p + 2L_s)} \quad (9)$$

従って、電界  $E$  とスクリーン上の中心からの変位距離  $D_a$ 、陰極線をスクリーン中心へ戻す磁界  $B$  を測定すれば、陰極線を構成する粒子の電荷と質量比が求められます。Thomson は陰極の材質を変更したり、真空管内の希薄気体<sup>2</sup>を変えても  $q/m$  の値が変わらないことを示しました。これより電荷はある基本単位で構成される可能性が導かれ、電子の存在が意識され始めました。

<sup>1</sup>磁界  $B$  の定義そのもの。  $v$  で動く荷電粒子に働く力は  $qv \times B$ 。

<sup>2</sup>これは発光します。ネオンサインと同じです。

## 2 電子の粒子性 (2): Millikan の油滴実験

R.A. Millikan は油滴の帯電量を実験で測定することにより、電荷の単位量を導き出しました。これが Millikan の油滴実験です。この実験を理解するには「ストークスの法則」に関する知識が必要です。この法則は非常に小さな物体が空気中を自由落下する場合、空気抵抗と重力が等しくなり等速度運動を行うというものです。 $\eta$  を空気の粘性係数、 $a$  を球状物体の半径とすれば、等速度  $v$  落下運動時に式 (10) が成立します。

$$6\pi\eta av = mg \quad (10)$$

落下する物体が非常に小さな油滴であるとすれば、油滴の質量  $m$  は、密度を  $\rho$  としたとき

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \quad (11)$$

なので、式 (10) に代入すれば落下等速度  $v$  と油滴の半径  $a$  の関係として式 (12) が得られます。

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \quad (12)$$

よって落下速度  $v$  が測定できれば油滴の半径  $a$  が求まるので、油滴の質量も求められます。

$$m = \frac{4\pi\rho}{3} \left(\frac{9\eta v}{2\rho g}\right)^{3/2} \quad (13)$$

それでは、ここで Millikan の実験に入りましょう。この実験では、電圧を印加した 2 枚の極板の間に油滴を噴霧します。極板間で、印加電圧と極板間距離に対応した電界  $E$  が存在するので、油滴の帯電電荷が  $q$  のとき、油滴には  $qE$  の力が作用します。この  $qE$  が重力  $mg$  と等しい場合、油滴は落下せずにそのまま停止します。つまり

$$qE = mg \quad (14)$$

そして電圧印加を止めると、ストークスの定理により油滴は等速度で落下します。この落下速度  $v$  を測定すれば式 (13) より、油滴の質量が求められます。従って、式 (13)(14) より電荷量  $q$  を求めることが可能となります。

$$q = \frac{4\pi\rho g}{3E} \left(\frac{9\eta v}{2\rho g}\right)^{3/2} \quad (15)$$

Millikan は油滴帯電電荷の測定結果から、電荷の基本単位である電気素量  $e =$  電子の電荷量を求めました。ちなみに現在の電気素量測定値は

$$e = 1.60218 \times 10^{-19} [C]$$

です。この結果を Thomson が得た式 (9) の  $q/m$  比に適用すれば、電子の質量  $m$  もわかります。

$$m = 9.10939 \times 10^{-31} [kg]$$

このように、Thomson の陰極線、Millikan の油滴実験から「粒子」としての電子が現れてきたわけです。

## 3 Planck のエネルギー量子仮説

話の筋から行けば、ここで電子の波動性に説明を移すところですが、そのためにまた予備知識を入れることにします。ちなみにこのセクション 3 と次のセクション 4 については、話の流れと結論だけ理解頂ければ問題ありません。

高温の物体から離れていても感じる熱... これは温度に応じたエネルギー (電磁波) が放射 (輻射) される現象です。そして完全に黒い物体 ~ つまり全ての光を吸収する物体、それは「黒体」と呼ばれる ~ は放射強度が最大の物質です。

実際には物質としての黒体は存在しないので、光をある程度吸収する空容器に小さな窓開けたものが代わりとして使用されます。これは窓から入った光は容器内で反射/吸収を繰り返して、窓から再び出てくることは無い：すなわち黒体と見なせるからです。従ってこの容器に熱をかければ、その熱平衡状態での電磁波スペクトル(黒体放射)を観測することができます。

実際に黒体放射のスペクトルを観測すると図3のような結果が得られます。この図を説明するために Raileigh

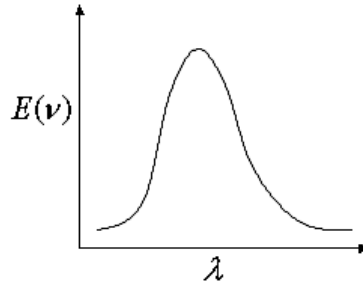


図 3: 黒体放射のスペクトル

と Jeans は、エネルギー当分配則を適用して

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}kT\nu^2 d\nu \quad (16)$$

を導き出しましたが、これは実験結果の長波長側しか説明できませんでした。次に Wien は短波長側の実験結果から

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi k\beta}{c^3}e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\nu^3 d\nu \quad (17)$$

を提示し、 $\beta$  を適当な値にすれば、短波長側の実験結果を説明できることを示しました。

これらの結果に対し Planck は  $k\beta = h$  とし

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \nu^3 d\nu \quad (18)$$

とすれば、 $h\nu/kT \ll 1$  では式 (16) に、 $h\nu/kT \gg 1$  では式 (17) となり、長波長/短波長側で実験結果が説明できることを見つけました。この式の統計的意味合いとして導かれた仮説が、振動数  $\nu$  を持つ電磁波のエネルギーは  $h\nu$  の整数倍を取るというものでした。つまり

$$E = nh\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

これが Planck のエネルギー量子仮説です。そして  $h$  は Planck 定数と呼ばれ、黒体放射の実験結果から

$$h = 6.6262 \times 10^{-34} [Js] \quad (20)$$

が得られました。

## 4 Einstein の光量子仮説

まだ電子に話が戻りません。もう 1 アイテムお付き合い下さい。

光は波動の性質を持つ—これは、第 1 回目のレポートで説明した「ヤングの実験」でもわかっていることです。光の諸現象については「波動」の考え方を適用すればほとんど説明できるのですが、1 つだけ説明しきれな

い現象がありました。それは光電効果です。

光電効果とは、金属に光を当てると表面が正電気を帯びる現象です。Lenard は光電効果について下記の事柄をまとめていました。

- (1) 正電気を帯びるのは金属から電子がとび出すため。(電荷/質量比より電子と特定)
- (2) 光の振動数  $\nu$  が大きいとき、エネルギーの高い電子がとび出す。
- (3) 光の強度が大きいと、とび出る電子の数が増える。

光は波動の性質を持つことに着目すると、波動のエネルギーは振幅すなわち強度の 2 乗に比例するので、強度を上げればとび出す電子のエネルギーも大きくなるはずですが、これは (3) の事実と矛盾します。つまり波動の性質だけでは説明することができないのです。

これに対し Einstein は Planck のエネルギー量子仮説の流れを汲み、金属の仕事関数 (電子の束縛エネルギー) を  $W$  とした場合、振動数  $\nu$  の光を当てたときにとび出す電子のエネルギー  $E$  は

$$E = h\nu - W \quad (21)$$

で与えられるという仮説を発表します。つまり光はエネルギー  $h\nu$  を持つ粒子であると解釈できる—これが Einstein の光子仮説です。この仮説は先ほど油滴実験の話で出てきた Millikan によって実験による根拠が与えられました。従って光を粒子と見た場合のエネルギー  $E$  は

$$E = h\nu \quad (22)$$

そして運動量  $p$  は相対論 (光子は静止質量 0 で、速度  $c$  が不変) より

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (23)$$

と表すことができます。この両式 (22)(23) が粒子と波動を結ぶ重要な関係式になります。

## 5 電子の波動性:de Broglie の物質波

de Broglie は Einstein が光子で説明した波動と粒子の二重性が、その他の物質粒子—電子、陽子等にも適用されるという考え方を提唱しました。

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (24)$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (25)$$

物質に伴う波動を de Broglie 波または物質波と呼び、式 (24)(25) を de Broglie の関係式と呼びます。この考え方を検証するには... 電子の波動性、例えば干渉等を確認できれば良いことになります。

ようやく電子の話に戻りました。実は電子線の干渉が最初に確認されたのは、de Broglie が物質波の仮説を発表するよりも前でした。Davisson と Germer は、電子線をニッケルの結晶表面に当て、その反射電子強度を観測したところ干渉が生じていることを確認していました。

図 4 からわかるように、反射電子の経路差は  $d \sin \theta$  で与えられます。第 1 回のレポートで説明したように、干渉によって波動が強め合う条件は、経路差が波長  $\lambda$  の整数倍になるときです。つまり

$$n\lambda = d \sin \theta \quad (26)$$

です。Davisson と Germer の実験では最も強い干渉を示す (上式で  $n = 1$ ) 反射角度は  $\theta = 50^\circ$  でした。またニッケルの格子間隔は  $d = 2.15 \text{ \AA}$  なので、電子線を波動と解釈した場合の波長  $\lambda$  は下記となります。

$$\lambda = 2.15 \text{ \AA} \times \sin(50^\circ) = 1.647 \text{ \AA} \quad (27)$$

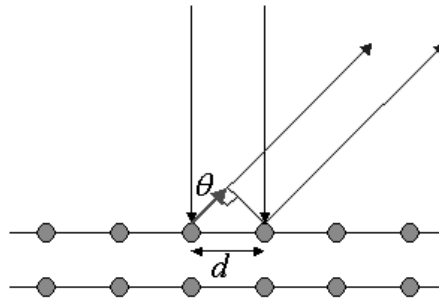


図 4: 結晶表面の電子線反射

次に、de Broglie の関係から波長  $\lambda$  を求めてみます。電子線のエネルギーが  $54[\text{eV}]$  なので、電子の運動量  $p$  は

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad p = \sqrt{2mE} = \frac{h}{\lambda} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (28)$$

$$\lambda = \frac{6.6262 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times (9.109 \times 10^{-31}) \times (54 \times 1.602 \times 10^{-19})}} = 1.670 \text{ \AA}$$

となり、干渉の条件から求めた波長とほぼ一致します。つまり電子も粒子と波動の二重性を持ち、de Broglie の関係式を適用できることが確かめられたわけです。

## 6 まとめ

今回は電子の二重性—粒子性と波動性について過去の実験や研究の経緯を眺めてきました。陰極線と油滴実験により電子は粒子としての電荷と質量を与えられました。一方波動性はニッケル結晶格子の反射強度という等価的に超微小なスリットによる干渉実験で確認され、この結果から物質波という考え方で光と統合されていったのです。

電子が粒子と波動の二重性を持つことは定性的にわかりましたが、ならばどのように解析すればよいのか…。この答えは Schrödinger の波動方程式になります。しかし、ここから微分方程式が出てくる上に複素関数も少し絡むので、高校数学レベルでは解釈がつかなくなってきます。

そこで、次回から 2 回程度に渡って、これから扱う数学(オイラーの公式、線形同次二階微分方程式の解法)について解説をしたいと思います。高校数学の上に積み上げるレベルで説明するつもりなので、初めての方でも目を通して頂ければ問題無い内容とする予定です。では、今回はこれにて。

以上

### 履歴

2005/06/16: 初版

Copyright(c)2005 Monpe  
All Rights Reserved