

# 半導体デバイスの物理 (基礎編)

## 数学準備 (1):関数の級数展開と Euler の公式

今後半導体デバイスの物理を理解するために必要な数学を扱います。初めに工学/理学にとって必須と言える Euler の公式を関数の級数展開を使って証明します。

### 1 複素数と指数関数

はじめに動機付けとして複素数の性質を見ることにします。複素数... 実部と虚部の二要素で構成され、 $z = x + iy$  で表されます。 $x$  が実部、 $y$  が虚部に相当します。この実部 (Real) と虚部 (Image) を 2 次元の座標と見立てた場合、図 1 のように極座標で表示することができます。

極座標で複素数を表した場合  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と書くことができます。ここで複素数の積を考えましょ

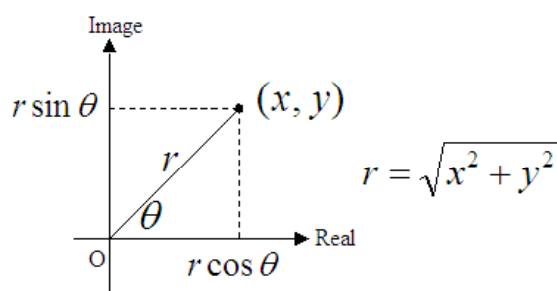


図 1: 複素数の極座標表示

う。まず複素数  $z_1$  と  $z_2$  を下記のように定義します。

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

そして  $z_1$  と  $z_2$  の積を計算してみると

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

となります。計算結果の整理に三角関数の加法定理を利用しています。加法定理の詳細はレポート第 1 回 [波動の性質:セクション 4.1] を参照下さい。さて  $\theta$  に注目すると、積が和に変換されていることがわかります。同様に商を計算してみると

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

となり、やはり  $\theta$  に注目すると商が差に変換されていることがわかります。積が和/商が差... この性質はどこかで見たことはありませんか?... そうです、これは指数関数と似ているのです。

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a^{x_1}, \quad f(x_2) = a^{x_2} \\ f(x_1) \cdot f(x_2) &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} = f(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

もしかすると、複素数の極座標表示と指数関数は何らかの形で関連付けすることができるかもしれない... そんな考えが頭に浮かんでくるでしょう。それには、極座標表示で利用される三角関数と指数関数の性質を、もう少し深く解析する必要があります。

関数を解析する1手法として関数の級数展開があります。そこで、三角関数と指数関数の関連を確かめるために、関数の級数展開を学んでみることにします。これは微分法の流れを汲んでいるので、まずは微分の話から話を始めることにしたいと思います。

## 2 微分法

### 2.1 導関数

導関数の定義を思い出してみましょう。関数  $y = f(x)$  が  $x = a$  の近傍で定義されていて

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

が存在する(発散しない)とき、 $f(x)$  は  $x = a$  において微分可能であると言います。式(1)の極限値を  $f(x)$  の  $x = a$  における微分係数と呼び、 $f'(a)$  と表します。

関数  $f(x)$  が定義できる区間で、任意の  $x$  に対する微分係数に対応した関数を導関数と呼び

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

で与えられます。導関数は

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

等とも表記されます。

導関数を定性的に言ってしまうと、ある関数  $f(x)$  の  $x$  における接線の傾きを意味しています。導関数の定義自体が  $f(x)$  の極限に近い2点間の傾きですから、連続で微分可能な区間では「接線の傾き」と表現しても問題はありません。では導関数の定義を思い出したところで、いくつかの関数の導関数を実際に求めてみましょう。

### 2.2 $f(x) = x^2$ の導関数

小手調べに  $f(x) = x^2$  の導関数を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

### 2.3 $\sin x, \cos x$ の導関数

我々の目的は三角関数と指数関数を解析することです。なので、当然これらの関数についても導関数を扱います。では  $f(x) = \sin x$  の導関数から求めてみましょう。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

このままだと計算が進まないで、どうにか分子を変形したいと思います。例えば加法定理を用いて  $x, \Delta x$  の項に分解してみましょう。すると、以下のように整理すれば都合が良さそうです。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{\Delta x}{2} \right\} - \sin \left\{ \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\Delta x}{2} \right\}}{\Delta x} \quad (4)$$

ここで  $\sin(a+b) - \sin(a-b)$  について考えてみると

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \quad (5)$$

よって式 (4) は

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \quad (6)$$

となります。ここで  $\sin x/x$  についてですが、解析的に解くのは難しいので、ここは幾何的に考えてみることにしましょう。図 2 を見ると  $\triangle ORP$ 、扇形  $ORP$ 、 $\triangle OQP$  の面積の関係から式 (7) が成立します。

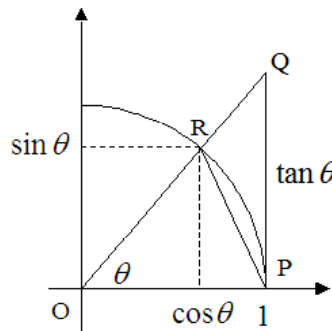


図 2:  $x$  と  $\sin x$  の関係

$$\frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{\theta}{2\pi} \pi \leq \frac{1}{2} \tan \theta \quad \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \frac{1}{\sin \theta} \geq \frac{1}{\theta} \geq \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (7)$$

$$1 \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta$$

ここで  $\theta \rightarrow 0$  のとき  $\cos \theta \rightarrow 1$  なので

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

になります。すると式 (6) は

$$f'(x) = \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x \quad (8)$$

となり、 $\sin x$  の導関数として  $\cos x$  が得られました。証明は省略しますが  $\cos x$  の導関数は  $-\sin x$  になります。

## 2.4 指数関数 $e^x$ の導関数

次は指数関数の導関数を求めます。指数関数は底の値により単調増加又は減少となります。つまり傾きである導関数もまた単調増加又は減少となります。すると... ある底の値では  $f(x) = f'(x)$  の関係が成立する... かもし

れません。そこで仮に  $f(x) = f'(x)$  が成立する指数関数  $f(x)$  の底を  $e$  としてみましょう。

それでは  $f(x) = e^x$  について導関数  $f'(x)$  を求めてみることにします。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{(x+\Delta x)} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad (9)$$

式 (9) に対し  $S$  を

$$S = e^{\Delta x} - 1$$

と定義します。更に  $\ln$  を  $e$  を底とする対数関数とすれば

$$e^{\Delta x} = S + 1 \quad \Delta x = \ln(S + 1)$$

となるので式 (9) の極限項は

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S}{\ln(S + 1)} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{S} \ln(S + 1) \right\}^{-1} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \ln(S + 1)^{\frac{1}{S}} \right\}^{-1} \quad (10)$$

深い意味は無いのですが、 $n = 1/S$  とすれば式 (10) は

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \ln(S + 1)^{\frac{1}{S}} \right\}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}^{-1} \quad (11)$$

となります。ここで式 (9) より  $f(x) = f'(x) = e^x$  が成立する条件を考えると、それは式 (11) の値が 1 になることです。すなわち

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (12)$$

であれば良いこととなります。ここまで、とぼけて仮の数値  $e$  を使ってきましたが、ほとんどの方がお気付きの通り、この  $e$  は有名なネピア数であり、式 (12) はネピア数の定義そのものになります。こうして  $f(x) = f'(x)$  となる特殊な指数関数  $e^x$  を得ることができました<sup>1</sup>。

ここまでの話をまとめると、三角関数と指数関数の導関数を求めてみましたが、 $\sin x$  は  $\cos x$  に、 $\cos x$  は  $-\sin x$  に、そして  $e^x$  はそのままという結果になりました。複数階の微分に対し「もとの関数に戻る」という特徴には類似性が伺えます。それでは、この「導関数が簡単に得られる」という性質を利用して、さらに解析の手段を広げてみたいと思います。

### 3 関数の級数展開

#### 3.1 高階導関数と級数展開

ある関数  $f(x)$  が

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

で近似できるとしましょう。この関数  $f(x)$  が  $x = 0$  において定義されれば

$$f(0) = a_0$$

になります。そして  $x = 0$  において  $n$  階微分可能とした場合、 $f'(0)$  と  $f''(0)$  を考えると

$$f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

<sup>1</sup>ネピア数  $e$  が実数として収束するかどうかの検証が必要ですが、それは別途とします。

同様に  $f^{(n)}(0)$  を考えると

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

となるので、このとき関数  $f(x)$  は式 (13) で表せることになります。

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (13)$$

式 (13) に誤差を表現する項  $R_{n+1}(x)$  を付け加えれば、関数  $f(x)$  は式 (14) になります。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (14)$$

したがって、関数が級数で表せるという仮説を検証するには、式 (14) の誤差項  $R_{n+1}(x)$  が定まるかどうかという検討をすれば良いことになります。もちろんこれは証明できるので、その道筋を眺めることにしましょう。Rolle の定理を利用し、誤差項  $R_{n+1}$  の存在を確認するという流れになります。

### 3.2 Rolle の定理

関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続かつ微分可能であり、 $f(a) = f(b)$  であれば

$$f'(\xi) = 0, \quad a < \xi < b$$

となる点  $\xi$  が存在する。

(定性的な証明)

$f(x)$  は区間  $[a, b]$  で連続なので、最大値  $M$  および最小値  $m$  が存在します。 $M \neq f(a)$  であれば、 $f(\xi) = M$  において  $f'(\xi) = 0$  となる点  $\xi$  が存在します。また、 $M = f(a)$  であれば、 $f(\xi) = m$  において  $f'(\xi) = 0$  となる点  $\xi$  が存在します。 $M = m = f(a) = f(b)$  の場合は区間  $[a, b]$  において定数なので自明です<sup>2</sup>。

### 3.3 Taylor の定理

関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続かつ  $n+1$  階導関数  $f^{(n+1)}(x)$  が存在するとき

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad a < \xi < b$$

となる  $\xi$  が存在する。

(証明)

はじめに誤差項  $R_{n+1}$  を

$$R_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}k$$

とすれば、 $f(b)$  は

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}k$$

---

<sup>2</sup> $\epsilon - \delta$  法には触れないで証明しています。

と表されます。そして関数  $F(x)$  を

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}k \right\}$$

とすれば

$$F(b) = F(a) = 0$$

が成立することは明らかです。このとき Rolle の定理から、関数  $F(x)$  の導関数  $F'(x)$  が 0 になる点  $\xi$  は  $a < \xi < b$  で必ず存在することがわかります。ここで  $F'(x)$  を計算して整理すると以下が得られます。

$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}k$$

そして  $x = \xi$  では  $F'(\xi) = 0$  なので

$$k = f^{(n+1)}(\xi)$$

となります。したがって

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad (15)$$

$$a < \xi < b$$

が成立します。

### 3.4 Maclaurin 展開

Taylor の定理として、式 (15) が得られたわけですが、ここで  $b = x, a = 0$  としてみると

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (16)$$

が得られます。この式は Maclaurin 展開と呼ばれます。

式 (16) は  $n + 1$  項まで展開を行っていますが、次は無限項までの展開を考えてみます。式 (16) が無限に展開できるとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$$

が成立することです。つまり無限項が 0 に収束すれば、無限級数は  $f(x)$  に収束するということです。

ようやく話が本題に戻りつつありますが、関数  $f(x)$  が  $e^x, \sin x, \cos x$  の場合に、無限級数として展開できるかどうかを確かめてみることにしましょう。初めに  $f(x) = e^x$  の場合ですが、級数の第  $n$  項  $\alpha_n$  は

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{x^n}{n!}$$

になります。ここで  $\alpha_{n+1}/\alpha_n$  の値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

であることから、 $\alpha_n$  は常に減少するので 0 へ収束します<sup>3</sup>。この結果から  $f(x) = e^x$  は無限級数として表すことができると言えます。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (17)$$

<sup>3</sup>これは数列の収束条件として本来証明が必要ですが「感覚的にもわかる」と判断して省略しました。

$\sin x, \cos x$  の場合ですが、 $f^{(n)}(0) = \sin 0 = 0$  に相当する項は消えるので、 $\alpha_n$  項の単調減少を確認するには  $\alpha_{n+2}/\alpha_n$  を検討することになります

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(n+2)(n+1)} = 0$$

となるので、 $e^x$  と同様に無限級数で表すことができます。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (18)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (19)$$

これで、三角関数  $\sin x, \cos x$  と指数関数  $e^x$  について無限級数展開式を得ることができました。

## 4 Euler の公式

数ページ前の話なので頭から揮発しているかもしれませんが、我々が三角関数と指数関数について級数展開式を導き出した理由は... 複素数の極座標表示は指数関数と何らかの関係があるかもしれない... これを確かめるためです。

ここで  $x = i\theta$  として、 $f(i\theta) = e^{i\theta}$  を式 (17) から級数展開形式で表してみます。

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{(\theta)^2}{2!} - i\frac{(\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdots \\ &= \left\{ 1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} + \cdots \right\} + i \left\{ \theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots \right\} \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned} \quad (20)$$

このように、複素数の極座標形式  $\cos \theta + i \sin \theta$  は指数関数  $e^{i\theta}$  で表すことができるのです。これは Euler の公式と呼ばれています。したがって、複素数  $z$  の極座標表示  $z(r, \theta)$  は次式となります。

$$z(r, \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Euler の公式はとても重要です。指数関数  $e^x$  が  $f(x) = f'(x)$  という特徴を持つ上に、複素数の極座標を肩代わりします。これにより  $e^x$  は  $x$  が複素数である場合も含めて、微分方程式の解要素に利用されます。そこで、次回は半導体デバイスの物理を学ぶのに必須となる二階の同次線形微分方程式について学習を進めることにしたいと思います。

以上

履歴

2005/06/27 : 初版

Copyright(c)2005 Monpe  
All Rights Reserved